

POZIOM ROZSZERZONY - 2025

**ZAD. 1 R.** (2 pkt) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a < b$  zachodzi nierówność

$$3ab^2 + b^3 \geq 4a^3.$$

**ZAD. 2 R.** (4 pkt) Rozwiąż nierówność

$$|x - 2| \geq 2(\sqrt{x^2 + 6x + 9} - 1).$$

Zapisz obliczenia.

**ZAD. 3 R.** (5 pkt) Dla jakich wartości rzeczywistego parametru  $p$  równanie

$$(p - 1)x^2 - (p + 1)x - 1 = 0$$

ma dwa pierwiastki tego samego znaku odległe co najwyżej o 1?

**ZAD. 4 R.** (4 pkt) Rozwiąż równanie

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$$

**ZAD. 5 R.** (7 pkt) Dany jest trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie  $\alpha$  i ramieniu  $b$ . Ramiona tego trójkąta przecięto prostą, odcinając z niego deltoid. Wyznacz kąty pozostałego mniejszego trójkąta oraz jego pole. Sporządź rysunek. Kiedy zadanie ma rozwiązanie?

**ZAD. 6 R.** (5 pkt)

Punkty  $A(-3, 2)$ ,  $C(4, 2)$ ,  $D(0, 4)$  są wierzchołkami trapezu równoramiennego  $ABCD$ , w którym tylko  $AB \parallel CD$ . Wyznacz współrzędne wierzchołka  $B$  oraz pole trapezu. Sporządź rysunek.

**ZAD. 7 R.** (6 pkt) Na okręgu  $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$  wyznacz punkt, którego odległość od prostej  $x - 3y + 6 = 0$  jest najmniejsza. Sporządź rysunek.

**ZAD. 8 R.** (6 pkt) Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Ostrosłup ten podzielono płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy na dwie bryły o tej samej objętości. Wyznacz tangens kąta nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy. Sporządź rysunek.

**ZAD. 9 R.** (6 pkt) Wykaż, że objętość stożka wpisanego w kulę o promieniu  $R$  wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3}H^2(2R - H).$$

Wyznacz wymiary stożka o największej objętości wpisanego w kulę o promieniu  $R$ . Sporządź rysunek.

**ZAD. 10 R.** (5 pkt) Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając trzykrotnie symetryczną kostką do gry, wyrzucimy trzy "szóstki", pod warunkiem, że suma wyrzuconych oczek jest większa niż 15?