POZIOM ROZSZERZONY - 2024

Zad. 1R. *(3 pkt)* Wykaż, że jeżeli $\log_2 3 = a$ oraz $\log_3 5 = b$, to $\log_{20} 48 = \dfrac{a+4}{2+ab}$.

Zad. 2R. *(4 pkt)* Między liczby 5 i 15 wstaw dwie liczby tak, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny.

Zad. 3R. *(5 pkt)* Dla jakich wartości parametru m istnieją dwa różne pierwiastki x_1, x_2 równania

$$4x^2 + 4(m-1)x + 4m - 7 = 0$$

spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 < 0$?

Zad. 4R. *(5 pkt)* Rozwiąż równanie $\sin 4x + \sin 2x = 4\cos^2 x - 1$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

Zad. 5R. *(4 pkt)* Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 10, w których zapisie dziesiętnym wszystkie cyfry są różne i dokładnie trzy z nich są nieparzyste?

Zad. 6R. *(4 pkt)* Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dziesięciu rzutach dwiema kostkami suma wyrzuconych oczek przynajmniej dwa razy przekroczy 9?

Zad. 7R. *(5 pkt)* Dany jest trójkąt ABC, w którym miara kąta przy wierzchołku C jest dwa razy większa niż miara kąta przy wierzchołku A. Wykaż, że $|AB|^2 - |BC|^2 = |AC| \cdot |BC|$. Sporządź rysunek.

Zad. 8R. *(3 pkt)* Oblicz granice

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^4 - 16}{(x+2)^2} \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^4 - 16}{(x+2)^2}.$$

Zad. 9R. *(8 pkt)* W kartezjańskim układzie współrzędnych dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (4, 3)$ i promieniu równym 2. Przez punkt P o obu współrzędnych dodatnich, leżący na prostej $y = \frac{1}{2}x + 1$ poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach A i B. Wyznacz współrzędne punktu P tak, aby pole czworokąta $PASB$ było równe 8. Sporządź rysunek.

Zad. 10R. *(4 pkt)* Niech $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{3 - x}$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, 1)$.

Zad. 11R. *(5 pkt)* Objętość graniastosłupa prawidlowego trójkątnego wynosi 54. Jakie powinny być jego wymaiary, aby pole powierzchni całkowitej było najmniejsze? Sporządź rysunek.