

MIĘDZYNARODOWY KONKURS
MATEMATYKA – NASZ WSPÓLNY JĘZYK

FINAŁ - KORESPONDENCYJNY

1. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

i zbadać ilość rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

2. Udowodnij, że jeżeli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n , to n jest potęgą liczby 2.
3. W trójkącie ABC mamy $|AC| = 4$, $|BC| = 2$ oraz $\angle ACB = 2\angle BAC$. Wyznacz wszystkie kąty i pole tego trójkąta.
4. Udowodnij, że

$$\binom{2n+1}{n} < 4^n,$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej n .

5. Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi i $m \geq 2$ będzie liczbą całkowitą, taką że $a^m + b^m = c^m$. Dla jakich liczb całkowitych n można skonstruować trójkąt rozwartokątny o bokach a^n, b^n, c^n ?

English version:

1. Draw the graph of the function

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

and find the number of solutions of the equation $f(x) = m$ depending on the parameter m .

2. Prove that if $2^n + 1$ is a prime number for some positive integer n , then n is a power of 2.
3. Consider a triangle ABC such that $|AC| = 4$, $|BC| = 2$ and $\angle ACB = 2\angle BAC$. Find all angles and area of this triangle.
4. Prove that

$$\binom{2n+1}{n} < 4^n$$

for every positive integer n .

5. Let a, b, c be a positive numbers and $m \geq 2$ be an integer such that $a^m + b^m = c^m$. For which integers n is it possible to construct an obtuse triangle with sides a^n, b^n, c^n ?