

MIĘDZYNARODOWY KONKURS
MATEMATYKA – NASZ WSPÓLNY JĘZYK

ETAP 2 - KORESPONDENCYJNY

1. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a, b , których iloczyn ab jest podzielny przez 325, a suma $a + b$ równa się 325.

2. Rozwiąż nierówność

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} \geq \frac{1}{|x - 2| + 3}.$$

3. Korzystając ze wzoru $\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha$ oblicz wartość $\sin \frac{\pi}{5}$. Podaj wartość wyrażeń $\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{10}$ oraz $\cos \frac{\pi}{10}$. Wyprowadź wzór na pole dwudziestokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu r .

4. Udowodnij, że

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej n .

5. Dla jakich liczb dodatnich wymiernych x liczba x^x jest liczbą wymierną? Odpowiedź uzasadnij.

English version:

1. Find all pairs of positive integers a, b , whose product ab is divisible by 325, and the sum $a + b$ equals 325.

2. Solve the inequality

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} \geq \frac{1}{|x - 2| + 3}.$$

3. Using the formula $\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha$ calculate the value of $\sin \frac{\pi}{5}$. Also, provide the values of the expressions $\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{10}$ and $\cos \frac{\pi}{10}$. Finally, derive the formula for the area of a regular 20-sided polygon (icosagon) inscribed in a circle with radius r .

4. Prove that

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

for every positive integer n .

5. For which positive rational numbers x is the number x^x a rational number? Justify your answer.