czerwiec 2024 r.

MIĘDZYNARODOWY KONKURS
MATEMATYKA – NASZ WSPÓLNY JĘZYK

FINAŁ - KORESPONDENCYJNY

1. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = (x+1) - x^2(x+1) + x^4(x+1) - x^6(x+1) + ...,$$

która jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego.

2. Znajdź wartość parametru p, dla której suma kwadratów odwrotności pierwiastków równania $x^2 + (p-2)x - p = 0$ jest najmniejsza.

3. W czworokąt $ABCD$ wpisany jest okrąg. Oznaczmy przez M, N odpowiednio punkty styczności tego okręgu z bokami AB i CD oraz przez K punkt przecięcia odcinków MN i AC. Udowodnij, że

$$\frac{|AK|}{|CK|} = \frac{|AM|}{|CN|}.$$

4. Znajdź wszystkie wartości $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$1! + 2! + 3! + ... + n! = m^2,$$

dla pewnej liczby całkowitej m.

5. Udowodnij, że istnieje rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n) taki, że

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{n + a_n}}}} = 2,$$

oraz $a_n > n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

English version:

1. Find minimal and maximal value of the function

$$f(x) = (x+1) - x^2(x+1) + x^4(x+1) - x^6(x+1) + ...,$$

which is a sum of an infinite geometric series.

2. Find the values of the parameter p, for which the sum of the squares of the reciprocals of the roots of the equation $x^2 + (p-2)x - p = 0$ is minimum.

3. A circle is inscribed in quadrilateral $ABCD$. Let us denote the tangency points of this circle by M, N respectively with the sides AB and CD and K - the intersection point of the segments MN and AC. Prove that

$$\frac{|AK|}{|CK|} = \frac{|AM|}{|CN|}.$$

4. Find all such $n \in \mathbb{N}$ such that

$$1! + 2! + 3! + ... + n! = m^2,$$

for some integer number m.

5. Prove that there exists an increasing sequence of positive integer numbers (a_n) such that

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{n + a_n}}}} = 2,$$

and $a_n > n$ for every $n \in \mathbb{N}$.