marzec 2024 r.

MIĘDZYNARODOWY KONKURS
MATEMATYKA – NASZ WSPÓLNY JĘZYK

ETAP 2 - KORESPONDENCYJNY

1. Wykazać, że pole trójkąta ograniczonego styczną do wykresu funkcji
$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$
i jego asymptotami jest stałe. Sporządzić rysunek.

2. Wyznaczyć równanie krzywej utworzonej przez punkty, których odległość od osi $0x$ jest taka sama, jak odległość od półokręgu o równaniu $y = \sqrt{2x - x^2}$. Sporządzić rysunek.

3. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} \log_{(x-y)}[8(x+y)] & = & -2 \\ (x+y)^{\log_4(x-y)} & = & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $n-1$ dzieli się przez 200, a $n+1$ dzieli się przez 9.

5. Udowodnij, że każda liczba rzeczywista x spełnia nierówność
$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + ... + |x+2024| \geqslant 1012^2.$$

English version:

1. Prove that the area of the triangle bounded by the line tangent to the graph of the function
$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$
and its asymptotes is constant. Make a picture.

2. Find the equation of the curve formed by the points whose distance from the x–axis is the same as the distance from the semicircle given by the equation $y = \sqrt{2x - x^2}$. Make a picture.

3. Solve the system of equations
$$\begin{cases} \log_{(x-y)}[8(x+y)] & = & -2 \\ (x+y)^{\log_4(x-y)} & = & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. Find the smallest natural number n such that $n-1$ is divisible by 200, and $n+1$ is divisible by 9.

5. Prove that for every real number x we have
$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + ... + |x+2024| \geqslant 1012^2.$$