

MIĘDZYNARODOWY KONKURS
MATEMATYKA – NASZ WSPÓLNY JĘZYK

ETAP 2 - KORESPONDENCYJNY

1. Rozwiązać nierówność

$$x - 1 > \sqrt{x^2 - 3}.$$

2. Rozwiązać równanie

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x.$$

3. Rzucamy sześcienną kostką do gry 5 razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z liczb 1 i 2 pojawi się przynajmniej raz?
4. Wyznaczyć liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = x^2 - p. \end{cases}$$

w zależności od parametru p .

5. Funkcja

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

spełnia warunki: $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$ i $f(1) \leq 1$. Jaką największą wartość funkcja ta może osiągnąć na przedziale $[0, 1]$?

English version:

1. Solve the inequality

$$x - 1 > \sqrt{x^2 - 3}.$$

2. Solve the equation

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x.$$

3. An ordinary six-sided dice is rolled five times. Find the probability that each of the results 1 and 2 appears at least once.
4. Find the number of solutions to the system of equations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = x^2 - p, \end{cases}$$

with respect to the parameter p .

5. Let

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

be a function such that: $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$ and $f(1) \leq 1$. What is the maximal value which $f(x)$ can obtain on the interval $[0, 1]$?