

MIĘDZYNARODOWY KONKURS
MATEMATYKA – NASZ WSPÓLNY JĘZYK

FINAŁ - KORESPONDENCYJNY

1. Niech

$$f(x) = 1 - \frac{2^x}{3^x - 2^x} + \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x} \right)^2 - \dots$$

Narysować wykres funkcji $f(x)$ i rozwiązać nierówność $f(x) > \frac{1}{2}$.

2. Znajdź wszystkie takie styczne do okręgu $x^2 + y^2 = 9$, które mają dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą $y = x^2 + 3$. Wykonaj rysunek.
3. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 60\}$, wylosowano bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych liczb jest mniejsza od 90 i co najmniej jedna z nich jest większa od 20.
4. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości przecinają się w punkcie S . Wiedząc, że $\angle BAC = 45^\circ$ oraz $|BC| = 7$, oblicz $|AS|$.
5. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n , takie że liczba $38^n - 25$ jest liczbą pierwszą.

English version:

1. Let

$$f(x) = 1 - \frac{2^x}{3^x - 2^x} + \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x} \right)^2 - \dots$$

Draw the graph of $f(x)$ and solve the inequality $f(x) > \frac{1}{2}$.

2. Find all tangent lines to the circle $x^2 + y^2 = 9$, which have exactly one common point with the parabola $y = x^2 + 3$. Draw them.
3. From the set $\{1, 2, \dots, 60\}$ two numbers were drawn without replacement. Find the probability that their sum is less than 90 and at least one of them is greater than 20.
4. Consider an acute triangle ABC such that its heights intersect at a point S , $\angle BAC = 45^\circ$ and $|BC| = 7$. Find the length of AS .
5. Find all positive integers n such that the number $38^n - 25$ is prime.